ANALISI MATEMATICA T-B (L-Z) (C.d.L. Ing. Gestionale)

Università di Bologna - A.A.2008-2009 - Prof. G.Cupini

Esercizi sull'integrazione

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

Esercizio 1. Si consideri la curva γ parametrizzata da

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t^3$$

con $1 \le t \le 2$.

(a) Stabilire se γ è regolare.
(b) Calcolare la lunghezza di γ.
(c) Calcolare l'ascissa del baricentro di γ.

[Sol.: (a) Sì, dato che $0 \notin (1,2)$. (b) $\frac{(40^{3/2} - 13^{3/2}}{27}$.]

Esercizio 2. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione polare

$$\rho(\theta) = \theta^2\,, \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

[Sol.: Usare la formula

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta,$$

ottenendo come risultato finale $\frac{1}{3}\left((\frac{\pi^2}{4} + 4)^{3/2} - 4^{3/2}\right)$.]

Esercizio 3. Sia γ la curva di equazioni parametriche:

$$x(t) = e^t + e^{-t}, \qquad y(t) = e^t - e^{-t} \qquad t \in [0,1].$$

(a) Studiare la regolarità di γ,
(b) Calcolare $\int_\gamma (x+y)^5\, ds$.

[Sugg.: (a) $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})} \neq (0,0)$ per ogni t. Dunque γ è regolare.
(b)

$$\int_\gamma (x+y)^5\, ds = 2^5 \int_0^1 e^{5t} \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})}\, dt = 2^5 \int_0^1 e^{4t} \sqrt{2(e^{4t} + 1)}\, dt$$

Proseguire per sostituzione ($e^{4t} = z$).]

Esercizio 4. Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Dimostrare che è regolare a tratti, semplice e chiusa.
(b) Tracciare un grafico qualitativo del sostegno di γ.

Esercizio 5. Calcolare

$$\int_\gamma x^2 y^2 \, ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

[Sugg.:

$$\int_\gamma x^2y^2\,ds = \int_0^{2\pi} 16\cos^2 t \sin^2 t \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 32\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,dt = ...]$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

$$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,ds$$

dove $\gamma(t) = (t, \log t)$, $t \in [1, 2]$;

$$\int_\gamma xy\,ds$$

dove γ l'arco di parabola $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 7. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ e $(\pi, \pi/2)$.

(a) Mostrare che T è un dominio normale sia rispetto ad x che rispetto ad y.
(b) Calcolare l'integrale $\int\int_T \sin x\,dx\,dy$ usando la normalità di T sia rispetto ad x che rispetto ad y.

[Sol.:

(a) La retta congiungente $(0,0)$ e $(\pi/2,\pi/2)$ ha equazione $y = x$. La retta congiungente $(0,0)$ e $(\pi,\pi/2)$ ha equazione $y = x/2$. Allora, se $b : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $b(x) = x$ se $0 \le x \le \pi/2$ e $b(x) = \pi/2$ se $\pi/2 \le x \le \pi$, si ha

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, \frac{x}{2} \le y \le b(x)\}$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \pi/2, y \le x \le 2y\}$$

(b) Normalità rispetto a x.

$$\int\int_T \sin x\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\sin x \int_{x/2}^{b(x)} dy\right) dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \int_{x/2}^{x} dy\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\sin x\int_{x/2}^{\pi/2} dy\right) dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\sin x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x(\pi/2 - x/2)\,dx\,.$$

Ora:

$$\int_a^b x\sin x\,dx = [-x\cos x]_a^b + \int_a^b \cos x\,dx = [-x\cos x + \sin x]_a^b\,.$$

da cui

$$\int\!\!\int_T \sin x\,dx\,dy = \frac{1}{2}[-x\cos x+\sin x]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}[\cos x]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2}[-x\cos x+\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = 1\,.$$

Normalità rispetto a y.

$$\int\!\!\int_T \sin x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_y^{2y}\sin x\,dx\right)\,dy = \int_0^{\pi/2} -[\cos x]_y^{2y}\;dy$$
$$= \int_0^{\pi/2}(-\cos(2y)+\cos y)\;dy = \left[-\frac{1}{2}\sin(2y)+\sin y\right]_0^{\pi/2} = 1$$

Esercizio 8. Sia D la regione del piano $\mathbb{R}^2$ delimitata dall'intersezione del primo quadrante con un cerchio di centro l'origine e raggio 1. Calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$.

[Sol.: $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ da cui, per il Teorema di riduzione

$$\int\!\!\int_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x-x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Analogamente, essendo $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$ si poteva utilizzare l'eguaglianza

$$\int\!\!\int_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy.$$

Esercizio 9. Sia

$$S = \{(x,y)\,:\,(x-1)^2+y^2\le 1, x\ge 1\}\cup\{(x,y)\,:\,(x-1)^2+y^2\le 1, y\ge -x+1\}.$$

i) Calcolare il baricentro di S.
ii) Calcolare

$$\iint_S y(x+1)\,dx\,dy\,.$$

Esercizio 10. Si considerino le seguenti funzioni f e domini D.

- $f(x,y) = x^2$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y\ge x^2-1, x^2+y^2\le 1\}$;
- $f(x,y) = 2ye^x$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le 4, x^2+y^2+2x\ge 0, x^2+y^2-2x\ge 0, y\ge 0\}$;
- $f(x,y) = \sqrt{x}-y^2$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y\ge x^2, x\ge y^4\}$;
- $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y\ge 0, y^2\le 4x, 5-x\ge y^2\}$.

Per ciascun D dire se sono normali rispetto a x e/o a y. Se sono normali rispetto a x determinare $[a, b]$ (intervallo in cui varia la x) e le funzioni $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ i cui grafici determinano il bordo inferiore e superiore di D; analogamente, se sono normali rispetto a y determinare $[c, d]$ e le funzioni $\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ (v.notazioni introdotte a lezione).

Infine, calcolare gli integrali doppi

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Esercizio 11. Calcolare

$$\iint_D e^y\, dxdy,$$

dove D è la regione del piano $x0y$ limitata dalla parabola di equazione $y^2 = x$ e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $y = 1$.

Esercizio 12. Usando il Primo Teorema di Guldino, calcolare il volume del solido di rotazione E ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y il triangolo T di vertici $(1, 0), (3, 0)$ e $(2, 1)$.

[Sugg.: si tratta di usare la formula $\operatorname{vol} E = 2\pi \iint_T x\, dx\, dy$.]

Esercizio 13. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 < y < x - 1\}$. Disegnare S e calcolare

$$\iint_S \frac{1}{x}\, dx\, dy.$$

[Sol.:

$$\iint_S \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\int_{(x-1)^2}^{x-1} dy \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \left((x-1) - (x-1)^2 \right) dx.$$

Perrtanto

$$\iint_S \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\log|x| \right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\log 2.]$$

Esercizio 14. Calcolare

$$\iint_D (1 + x + y)\, dx\, dy$$

dove D è la regione limitata del piano $0xy$ delimitata dalle curve di equazione $y = -x$, $x = \sqrt{y}$ e $y = 2$.

[Sol.: $\frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{13}{3}$]

Esercizio 15. Calcolare le coordinate del baricentro dell'insieme:

$$D = \{(x, y) \,:\, 0 \le y \le 2\,,\, |x| \le e^y\}\,.$$

[Sol.: $m(D) = 2(e^2 - 1)$, Il baricentro ha coordinate: $(0, \frac{e^2+1}{e^2-1})$.]

Esercizio 16. Calcolare il volume del solido di rotazione S ottenuto ruotando di un angolo $\pi/4$ attorno all'asse x il dominio

$$D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 25\} \cap \{(x,y) \,:\, y \geq 3\}.$$

[Sol.: $\operatorname{vol} S = \frac{\pi}{4} \iint_D y\, dx\, dy = \frac{32}{3}\pi$]

Esercizio 17. Calcolare

$$\iint_D y\, dx\, dy, \qquad \iint_D x^2\, dx\, dy,$$

dove $D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{\sqrt{3}} x \leq y \leq \sqrt{3} x\}$.

Esercizio 18. Usando un opportuno cambio di variabili, calcolare $\int_\Omega (x - 2y)\sin(x + 2y)\, dx\, dy$ dove Ω è la regione racchiusa dal quadrilatero del piano xy di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,3)$ e $(-4,2)$.

[Sugg.: Si consiglia il cambio $x - 2y = u$, $x + 2y = v$.]

Esercizio 19. Calcolare

$$\iiint_Q xyz e^{x+z}\, dx\, dy\, dz$$

dove $Q = \{(x,y,z) \,:\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Esercizio 20. Calcolare

$$\iiint_S y\, dx\, dy\, dz$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3)\},$$

integrando per strati e per fili.

[Sol.: l'intersezione tra $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3)$ è una circonferenza del piano $z = 2$ di centro $(0,0,2)$ e raggio 1.

Per fili:

$$\iint_D \Big(\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2+3)}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} y\, dz\Big)\, dx\, dy = \iint_D \Big(y\sqrt{5 - x^2 - y^2} - y\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3)\Big)\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e poi usare le coordinate polari.

Per strati:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \Big(\iint_{D_z} y\, dx\, dy\Big)\, dz + \int_2^{\sqrt{5}} \Big(\iint_{E_z} y\, dx\, dy\Big)\, dz$$

dove $D_z = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 2z-3\}$ e $E_z = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 5-z^2\}$ poi usare le coordinate polari. Ad esempio:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \Big(\iint_{D_z} y\,dx\,dy \Big)\,dz = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2z-3}} \rho^2 \sin\theta\,d\rho \Big) d\theta \Big) dz.$$

Esercizio 21. Usando le coordinate polari, calcolare

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \,:\, 2 \le x^2+y^2 \le 4, xy \ge 0\}$

[Sol.: $D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \{(x,y) \,:\, 2 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0,\, y \ge 0\} \qquad D_2 = \{(x,y) \,:\, 2 \le x^2+y^2 \le 4, x \le 0,\, y \le 0\}.$$

Uso le ccordinate polari: $\Phi_1 : T_1 \to D_1$, $\Phi_2 : T_2 \to D_2$, $\Phi_i(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, $i = 1,2$,

$$T_1 = \{(\rho,\theta) \,:\, \sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{4}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}, \qquad T_2 = \{(\rho,\theta) \,:\, \sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{4}, \pi \le \theta \le 3\frac{\pi}{2}\}.$$

Dunque:

$$\iint_D (y^2+2z)\,dx\,dy = \iint_{T_1} \rho\cos\theta(\rho\sin\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta + \iint_{T_2} \rho\cos\theta(\rho\sin\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = ...$$

Esercizio 22. Sia E il solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2\right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_E xy\sin z\,dx\,dy\,dz.$$

Esercizio 23. Sia E il solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le z \le x+y\right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_E (x-y)z\,dx\,dy\,dz.$$

Esercizio 24. Sia E il solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 6, z \ge x^2+y^2\right\}.$$

Calcolarne il volume.

Esercizio 25. Calcolare
$$\iiint_\Omega (3x^2 - x + y^3 + z)\, dx\, dy\, dz$$
dove
$$\Omega = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 26. Calcolare (per fili, per strati e usando le coordinate cilindriche)
$$\iiint_\Omega yz\, dx\, dy\, dz$$
dove
$$\Omega = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq z^2, 2 \leq z \leq 3\}.$$
[Sugg.: $x^2 + y^2 = z^2$ è un cono ottenuto per rotazione attorno all'asse z della retta $z = x$.

Usando il cambio di variabili cilindriche, $\Phi : T \to E$, dove
$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$$
e
$$T = \{(\rho, \theta, z) \,:\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3, 0 \leq \rho \leq z\}$$
si ha:
$$\iiint_E yz\, dx\, dy\, dz = \iiint_T (\rho \sin(\theta) z)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz = ...]$$

Esercizio 27. Calcolare $\int_\Omega (x + yz)\, dx\, dy\, dz$ dove $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ per fili e per strati.

Esercizio 28. Calcolare in tre modi (fili, strati, coordinate sferiche)
$$\iiint_E y\, dx\, dy\, dz$$
dove
$$E = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, z^2 \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2), z \geq 0\}.$$
[Sugg.: $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ è un cono ottenuto per rotazione attorno all'asse z della retta $z = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. L'intersezione tra $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ e $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$, con $z \geq 0$, è una circonferenza del piano $z = \sqrt{3}$ di centro $(0, 0, \sqrt{3})$ e raggio 3.

Usando il cambio di variabili sferiche, $\Phi : T \to E$, dove
$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$$
e
$$T = \{(\rho, \theta, \phi) \,:\, 0 \leq \rho \leq \sqrt{12}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}\}$$
si ha:
$$\iiint_E y\, dx\, dy\, dz = \iiint_T \rho \sin\phi \sin\theta \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = ...]$$